2.5. Vjerojatnost slučajnog događaja

Broj sati: 3

*Udžbenik: stranice 92. – 97.*

**Odgojno-obrazovni ishod**

**E.8.1.** Računa vjerojatnost događaja i na osnovi nje donosi odluke.

**Međupredmetne teme**

**uku A.3.2.** Učenik se koristi različitim strategijama učenja i primjenjuje ih u ostvarivanju ciljeva učenja i u rješavanju problema u svim područjima učenja uz povremeno praćenje učitelja.

**uku A.3.3.** Učenik samostalno oblikuje svoje ideje i kreativno pristupa rješavanju problema – učenik samostalno oblikuje svoje ideje i kreativno pristupa rješavanju problema.

**osr A.3.3.** Razvija osobne potencijale.

**osr B.3.2.** Razvija komunikacijske kompetencije i uvažavajuće odnose s drugima.

**pod A.3.1.** Primjenjuje inovativna i kreativna rješenja.

**pod B.3.2.** Planira i upravlja aktivnostima.

**Tijek nastavnih sati**

* **Definicije osnovnih pojmova**

**Aktivnost 1 – Procjena vjerojatnosti događaja iz svakodnevnog života**

Učitelj započinje sat pričom o vjerojatnosti svakodnevnih događaja: Kolika je vjerojatnost da dobijem šesticu u Čovječe ne ljuti se?, Kolika je vjerojatnost da izvučeš crnu kuglicu ako su u kutiji crna i bijela kuglica?, Kolike su šanse da dobijem sedmicu na lotu? itd. Učenicima je otprije poznata riječ vjerojatnost iz svakodnevnog života.

**Aktivnost 2 – Definiranje slučajnog pokusa, elementarnog događaja**

Učitelj definira slučajni pokus i elementarni događaj (udžbenik, str. 92.). Daje primjer elementarnih događaja kod bacanja novčića;

A={pala je glava}, B={palo je pismo}.

Ističe kako su oba ishoda jednako moguća.

Učenici rješavaju zadatak 105.b i samostalno provjeravaju ispravnost rješenja. Učitelj pomaže, usmjerava i vodi u procesu samovrednovanja (vrednovanje kao učenje).

**Aktivnost 3 – Siguran, moguć i nemoguć događaj**

Učitelj daje primjere događaja; „Danas će pasti snijeg.“, „Idem u školu prekosutra.“, „Na kockici je pao broj 9.“, „Na kockici će pasti paran ili neparan broj.“, „Sutra će pasti kiša.“… U razgovoru s učenicima učitelj ispituje koji je od navedenih događaja siguran, moguć (vjerojatan) ili nemoguć te zatim komentira događaje *Primjera 18*.

**Aktivnost 4 – Uvježbavanje**

Učenici samostalno ispisuju sve elementarne događaje sljedećih pokusa: bacanje kockice od 8 strana, izvlačenje kuglice iz kutije ako su na kuglicama prosti brojevi manji od 20, bacanja dvaju novčića. Nakon što završe, učitelj za svaki pokus bira učenika koji će pročitati svoje rješenje, komentira točnost, a ostali provjeravaju svoja rješenja (vrednovanje kao učenje).

Sljedeći je učenički zadatak na papirić napisati pet događaja te ubaciti papirić u kutiju. Nakon što svi završe, kutija 'ide' po razredu, svaki učenik izvlači jedan papirić, čita naglas događaj po događaj te određuje je li moguć, nemoguć ili siguran.

**Primjeri vrednovanja**

* Vrednovanje kao učenje:
* Aktivnosti 2 i 4 – samovrednovanje ispravnosti rješavanja zadataka
* Vrednovanje za učenje:
  + Aktivnost 1 – prikupljanje informacija o prethodnim znanjima
  + Aktivnost 4 – igra za vrednovanje za učenje

**Aktivnosti koje obuhvaćaju prilagodbe za učenike s teškoćama**

* T. Djaković, L. Havranek Bijuković, LJ. Peretin, K. Vučić: Matematika 8 – udžbenik za pomoć u učenju matematike u osmom razredu osnovne škole: stranica 71., zadatak: 33.

**Domaća zadaća**

* Pročitati iz knjige *Primjer 20.* te ga zapisati u bilježnicu.
* **Vjerojatnost slučajnog događaja – definicija i izračunavanje**

**Aktivnost 1 – Diskusija o *Primjeru 20*. iz domaćeg rada**

Učitelj ispituje učenik o Primjeru 20, daje sličan primjer da bi uvidio jesu li razumjeli; Koja je vjerojatnost da pri bacanju igraće kockice padne: broj 3, neparan broj, prost broj, broj veći od 4?

**Aktivnost 2 – Stupčasti dijagram i relativna frekvencija**

Učitelj u razgovoru s učenicima ponavlja što je stupčasti dijagram, frekvencija i relativna frekvencija (radili u 7. razredu).

Povezuje vjerojatnost slučajnog događaja s relativnom frekvencijama i grafičkim prikazom pomoću stupčastog dijagrama pomoću interaktivne simulacije Bacanja kockice na e-sferi: Algebarski izrazi, jednadžbe i njihova rješenja -> Vjerojatnost događaja -> e-Matematika -> interaktivna simulacija Bacanje kocke. Prilikom provođenja eksperimenta učitelj ističe da se pri velikom broju bacanja kocke relativne frekvencije pojavljivanja brojeva od 1 do 6 sve više izjednačuju.

**Aktivnost 3 – Definiranje vjerojatnosti događaja**

Nakon diskusije učitelj definira vjerojatnost događaja te zapisuje navedeno matematičkim simbolima. Ističe i vjerojatnost mogućeg, nemogućeg i sigurnog događaja. (udžbenik, str. 93. – 94.)

**Aktivnost 4 – Izračunavanje vjerojatnosti slučajnog događaja**

Učitelj na zadatcima 107. i 108. primjenjuje prethodno iskazanu formulu te izračunava vjerojatnost događaja iz zadatka.

Učenici rješavaju zadatke za vježbu 109. – 112. te zadatak 117. iz Povežite i primijenite te zatim samostalno provjeravaju ispravnost rješenja. Učitelj pomaže, usmjerava i vodi u procesu samovrednovanja (vrednovanje kao učenje).

**Aktivnost 5 – Kreiraj zadatak**

Učenici imaju zadatak smisliti pet događaja čija će vjerojatnost biti redom 25 %, , 0.2, , 75 %, 0.1 . Nakon što svi završe, svaki učenik čita svoje rješenje, a učitelj daje povratnu informaciju o točnosti (vrednovanje kao učenje).

**Primjeri vrednovanja**

* Vrednovanje kao učenje:
* Aktivnosti 4, 5 – samovrednovanje ispravnosti rješavanja zadataka
* Vrednovanje za učenje:
  + Aktivnost 1,2 – prikupljanje informacija o prethodnim znanjima
  + Aktivnost 4 – zadatci iz udžbenika za vrednovanje za učenje
  + Aktivnost 5 – igra za vrednovanje za učenje

**Aktivnosti koje obuhvaćaju prilagodbe za učenike s teškoćama**

* Zadatak 127.
* T. Djaković, L. Havranek Bijuković, LJ. Peretin, K. Vučić: Matematika 8 – udžbenik za pomoć u učenju matematike u osmom razredu osnovne škole: stranice 72. – 73., zadatak: 34. – 41.

**Aktivnosti za motiviranje i rad s darovitim učenicima**

* Dodatni zadatci 128.
* M.Muštra: Listići za dodatnu nastavu matematike u osmom razredu osnovne škole – stranica 25. zadatci 1. – 5.

**Domaća zadaća**

* Zadatci za vježbu: 113. – 115.
* Povežite i primijenite: 118.
* **Složeniji zadatci**

**Aktivnost 1 – Vjerojatnost komplementarnog događaja**

Učitelj započinje sat postavljajući dva zadatka; Koja je vjerojatnost da će pri bacanju dviju igraćih kockica pasti barem jedna petica? i Koja je vjerojatnost da će pri bacanja triju igraćih kockica pasti tri četvorke ili dvije petice i jedna šestica?

Učitelj diskutira s učenicima riječ *barem* koja se pojavljuje u zadatku. Koji je suprotan događaj od A=„Pri bacanju dviju igraćih kockica pala je barem jedna petica“? Suprotan bi događaj bio B=„Pri bacanju dviju igraćih kockica nije pala ni jedna petica“. Vjerojatnost događaja A možemo izračunati i oduzimanjem vjerojatnosti događaja B od 1 zato što je 1 vjerojatnost cijelog prostora koji u uniji tvore A i B.

Vjerojatnost događaja B bila bi  🡪 5·5 jer imamo 5 povoljnih ishoda na prvoj kockici (1, 2, 3, 4, 6) i isto na drugoj, a 6·6 što daje 36 mogućnosti koje možemo dobiti bacajući dvije kockice.

P(A) = 1 – P(B) = 1 - = 

Vjerojatnost događaja A mogli smo riješiti i prebrojavajući povoljne ishode; barem jedna petica: (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6) što daje ukupan broj od 11 povoljnih ishoda pa je

P(A) = 

U drugom zadatku događaj „Pri bacanju triju igraćih kockica pale su tri četvorke ili dvije petice i jedna šestica“ označimo sa C. Prebrojimo povoljne ishode za događaj C; (4,4,4), (5,5,6), (6,5,5), (5,6,5). Dakle,

P(C) = = 

Učitelj ističe (ponavlja) kako zadatke u kojima se kod opisa događaja pojavljuje *ili,* često možemo rješavati i kao zbroj vjerojatnosti (ne možemo kad im presjek nije prazan):

P(C) = = = 

**Aktivnost 2 – Uvježbavanje na zadatcima iz udžbenika**

Učenici rješavaju zadatke 120., 123., 124. i 126. te samostalno provjeravaju ispravnost rješenja. Učitelj pomaže, usmjerava i vodi u procesu samovrednovanja (vrednovanje kao učenje).

**Aktivnost 3 – Uvježbavanje**

Učitelj zadaje zadatke koje, nakon što svi riješe, provjeravaju na ploču s učiteljem (vrednovanje kao učenje).

* Koja je vjerojatnost da će prilikom bacanja deset novčića pasti barem dvije glave?
* Vjerojatnost za dobitak u prvoj igri je 50 %, a vjerojatnost za gubitak u drugoj igri je 60 %. Kolika je vjerojatnost da ćeš dobiti u obje igre? Koja je vjerojatnost da ćeš u prvoj izgubiti, a u drugoj dobiti?

**Aktivnost 4** – **Uvježbavanje – nastavni listić**

Učenici rješavaju zadatke s nastavnog listića i samostalno provjeravaju ispravnost rješenja. Učitelj pomaže, usmjerava i vodi u procesu samovrednovanja (vrednovanje kao učenje).

**Aktivnost 5 – Vrednovanje naučenoga**Učitelj provodi kratku pisanu provjeru Listićima za vrednovanje naučenoga (vrednovanje naučenoga).

Listići za vrednovanje kao učenje: Pr.1.

Listići za vrednovanje za učenje: **+,-.?** (Prilog H)

Listići za vrednovanje naučenog: Pr.1

**Primjeri vrednovanja**

* Vrednovanje kao učenje:
* Aktivnosti 1, 3, 4 – samovrednovanje ispravnosti rješavanja zadataka
* Aktivnost 4 – listići za vrednovanje kao učenje
* Vrednovanje za učenje:
  + Aktivnost 3, 4 – zadatci i listići za vrednovanje za učenje
* Vrednovanje naučenog:
  + Aktivnost 5 – listići za vrednovanje naučenog

**Aktivnosti koje obuhvaćaju prilagodbe za učenike s teškoćama**

* Nastavni listić – dopunski zadatci

**Aktivnosti za motiviranje i rad s darovitim učenicima**

* Nastavni listić – dodatni zadatci

**Domaća zadaća**

* Povežite i primijenite: 116., 121., 122., 125.

**Primjeri listića za vrednovanje kao učenje i vrednovanje naučenog**

**Vrednovanje kao učenje**

**Primjer 1:** Zadatci za vršnjačko vrednovanje (Prilog A)

●

Pitanja:

* Napiši tri moguća i dva nemoguća događaj.
* Napiši neki slučajan pokus i sve njegove elementarne događaje.
* Je li vjerojatnije da ćemo pri bacanju dviju igraćih kockica dobiti barem jednu šesticu ili dva parna broja?
* Napiši neki događaj i njemu suprotan događaj te im izračunaj vjerojatnosti. Što moraš dobiti kad zbrojiš dobivene vjerojatnosti?
* Smisli dva jednako moguća događaja te im izračunaj vjerojatnost.

♦ Pitanja:

* Napiši tri moguća i dva sigurna događaja.
* Napiši neki slučajan pokus i sve njegove elementarne događaje.
* Je li vjerojatnije da ćemo pri bacanju dviju igraćih kockica dobiti barem jednu peticu ili dva neparna broja?
* Napiši neki događaj i njemu suprotan događaj te im izračunaj vjerojatnosti. Što moraš dobiti kad zbrojiš dobivene vjerojatnosti?
* Smisli dva jednako moguća događaja te im izračunaj vjerojatnost.

**Vrednovanje naučenog**

Ime i prezime ................................................................ grupa A

1. Izračunajte nepoznati član razmjera.



2. U kućici za ptice dovoljno je sjemenki za prehranu 15 ptica tijekom 27 dana. Koliko bi dana potrajala ta ista količina sjemenki da se iz kućice hrani 6 ptica manje?

3. Ako se s 20 ml tinte mogu ispisati 142 stranice, koliko će tinte biti potrebno za ispisati 639 stranica?

4. Za koje vrijeme glavnica od 9 750 kn uz kamatnu stopu od 4 % donese iste kamate kao i glavnica od 19 500 kn uz kamatnu stopu od 6 % na dvije godine?

Ime i prezime ................................................................ grupa B

1. Izračunajte nepoznati član razmjera.



2. Ako 4 ml spreja može uništiti 25 600 bakterija, koliko se bakterija može uništiti s 15 ml spreja?.

3. Neki zid 15 zidara sazida za 54 sata. Koliko zidara treba još zaposliti da bi se zid sazidao za 45 sati?

4. Uz koliku kamatnu stopu glavnica od 35 000 kn za 2 godine donese jednake kamate kao i glavnica od 20 000 kn uložena na 7 godina uz kamatnu stopu od 4 %?

Ime i prezime ................................................................ grupa C

1. Izračunajte nepoznati član razmjera.



2. Ako ugostitelj na 1 200 kn zarade plati 300 kn poreza, koliko poreza treba platiti na 900 kn zarade?

3. Tri radnika obave neki posao za 8 sati. Za koliko bi sati isti posao obavila četiri radnika?

4. Tea je pozajmila 25 000 kn na 3 godine uz kamatnu stopu 6 %. Koliko će novca morati vratiti?

**Rješenja:**

**grupa A**

1. 12

2. 45 dana

3. 90 ml

4. 6 godina

**grupa B**

1. 23

2. 96 000 bakterija

3. 3 zidara

4. 8 %

**grupa C**

1. 

2. 225 kn

3. 6 sati

4. 29 500 kn

**Nastavni listići**

1. Odredite vjerojatnost da pri bacanju igraće kocke padne:

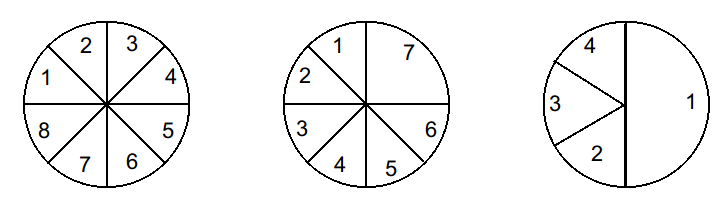
 a) broj 5

b) broj 7

c) broj manji od 7

d) broj 1 ili broj 4

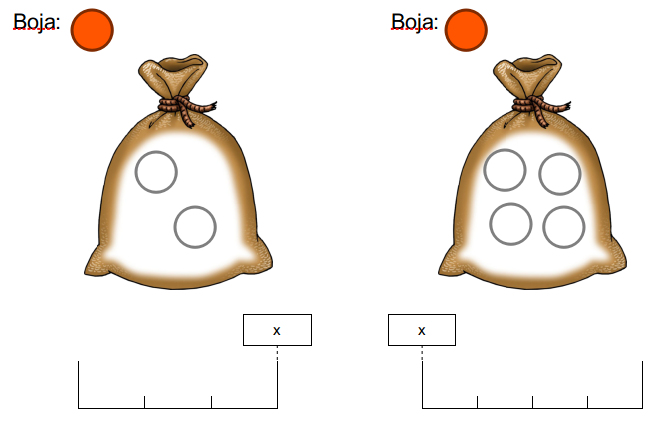
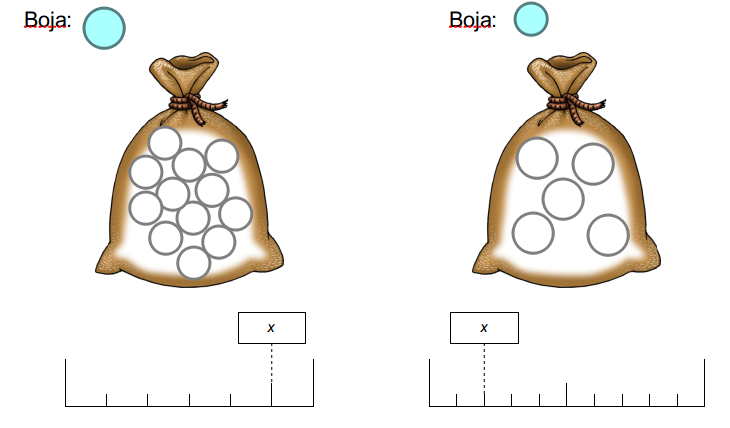
2. Odredite vjerojatnost svakog rezultata pri okretanju kola sreće:

 a) b) c)

3. Učenik je naučio 15 od 20 pitanja. Učiteljica je postavila jedno pitanje. Kolika je vjerojatnost da je učenik dobio pitanje koje nije naučio?

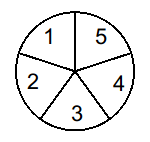
4. Obojite kuglice u vreći tako da vjerojatnost nasumičnog izvlačenja jedne kuglice zadane boje bude jednaka naznačenom dijelu jedinične dužine. Dužina je podijeljena na jednake dijelove.

a) b) c) d)



5. Iz kutije u kojoj je 12 bijelih, 6 crnih, 4 plave kuglice i dvije crvene kuglice izvlači se jedna kuglica. Za zadane vjerojatnosti definiraj događaje .

 , , , .

**Dodatni zadatci**

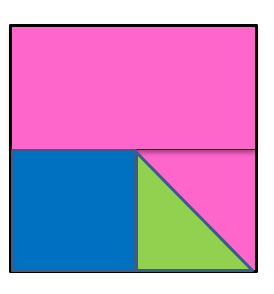
1. Tea vrti kolo sreće i baca igraću kocku. Kolika je vjerojatnost

da je zbroj brojeva s kola sreće i igraće kocke 3 ili 4?

1. Bacamo dvije kocke. Kolika je vjerojatnost događaja:
2. A – Zbroj je brojeva koji su pali 7.
3. B – Zbroj brojeva koji su pali djeljiv je s 3.
4. C – Nije pala ni jedna šestica.
5. D - Pala je barem jedna šestica.
6. Bacamo novčić tri puta. Kolika je vjerojatnost događaja:
7. A – Tri je puta palo pismo.



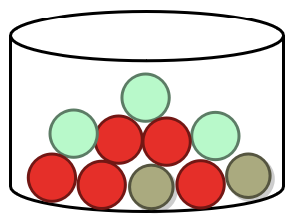
1. B – Tri je puta palo isto.
2. C - Posljednje je palo pismo.
3. D - Pala su tri pisma ili barem dvije glave.
4. U kutiji je 10 kuglica; 6 crvenih i 4 bijele. Izvlače se tri kuglice jedna za drugom s vraćanjem. Kolika je vjerojatnost da će barem jedna izvučena kuglica biti bijela?
5. Prema vremenskoj prognozi vjerojatnost je kiše u subotu 60 %, a u nedjelju 70 %. Kolika će biti vjerojatnost da kiša padne barem u jednom od ta dva dana?
6. Ema dva puta gađa kvadratnu metu sa slike. Kolika je vjerojatnost događaja:



1. A – Oba puta pogodila je područje iste boje.
2. B – Pogodila je područja različitih boja.
3. C – Pogodila je metu, ali nije pogodila ružičasto područje.

**Dopunski zadatci**

1. Pogledajte sliku i dopunite rečenice.



1. Broj je kuglica u posudi \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .
2. Broj je povoljnih ishoda, ako želimo izvući jednu crvenu kuglicu \_\_\_\_\_\_ , za jednu zelenu kuglicu \_\_\_, a za jednu smeđu \_\_\_\_ .
3. Vjerojatnost događaja A – „Izvučena je crvena kuglica“ je p(A)= \_\_\_\_\_ .

B – „Izvučena je zelena kuglica“ je p(B)= \_\_\_\_\_.

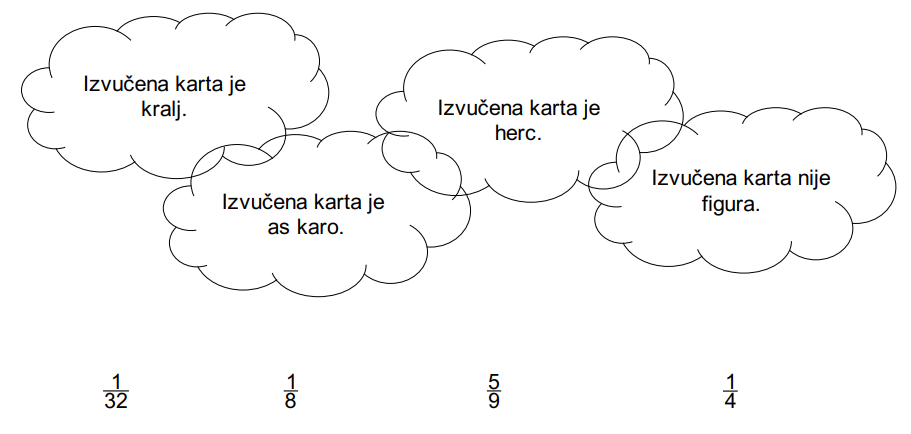
C – „Izvučena je smeđa kuglica“ je p(C)= \_\_\_\_\_ .

2. Na svakoj kartici napisano je po jedno slovo. Kartice su ispremještane i bez gledanja izvučena je jedna kartica.



1. Ispišite sve elementarne događaje.
2. Odredite vjerojatnost svakog elementarnog događaja.

3. Iz snopa od 32 karte (4 su boje i u svakoj je boji as, kralj, dama, dečko, 10, 9, 8 i 7) izvlači se jedna karta. Zadane događaje spoji s pripadnim vjerojatnostima.



**Rješenja nastavnog listića**

1. a) 6 je elementarnih događaja, a jedan je povoljan pa je vjerojatnost događaja „Pao je broj 5“ .

b) Događaj „Pao je broj 7“ nemoguć je događaj pa je njegova vjerojatnost 0.

c) Događaj „Pao je broj manji od 7“ siguran je događaj pa je vjerojatnost tog događaja 1.

1. Događaj „Pao je broj 1 ili broj 4“ ima 6 elementarnih događaja, od kojih su dva povoljna, stoga je vjerojatnost tog događaja .
2. a) 

b) , 

c) ,

3. p(Učenik je dobio pitanje koje nije naučio)= 

4. a) U vreći je 12 kuglica, a na jediničnoj je dužini naznačen broj . Da bi vjerojatnost izvučene plave kuglice bila , u vreći treba biti 10 plavih kuglica, stoga je potrebno 10 bilo kojih kuglica obojiti u plavo, a preostale dvije u neku drugu boju.

b) U vreći je 5 kuglica, a na jediničnoj dužini naznačen je broj . Jedna kuglica se oboji u plavo, a preostale četiri boje se u bilo koje druge boje (koje nisu plave).

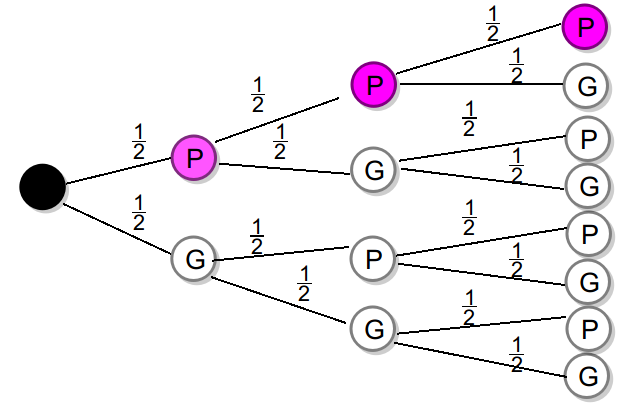
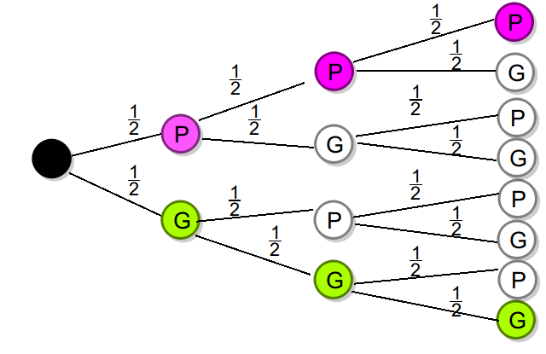
c) Kuglice su dvije. Budući da je vjerojatnost izvlačenja crvene kuglice 1, taj je događaj siguran događaj, pa je potrebno obje kuglice obojiti u crveno.

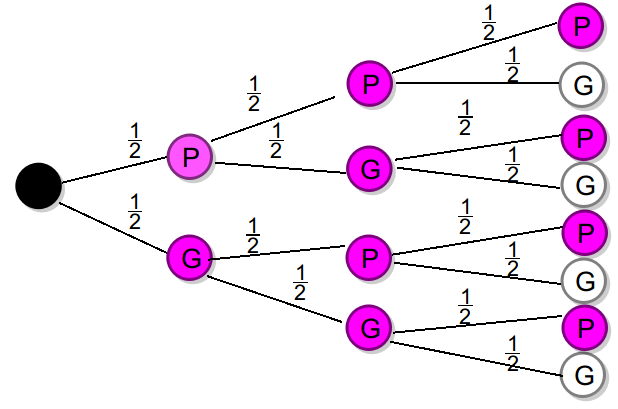
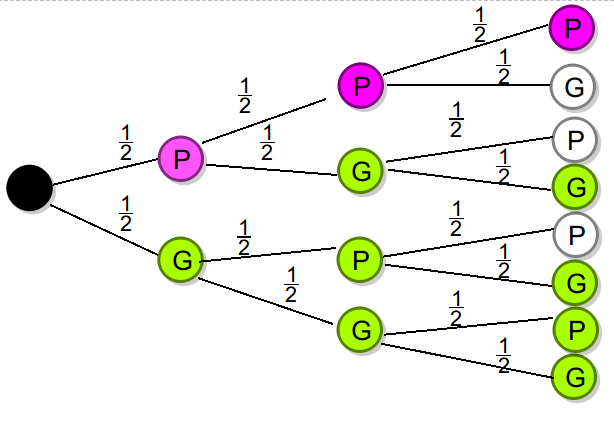
d) Budući da je vjerojatnost izvlačenja crvene kuglice 0, taj je događaj nemoguć događaj, pa se sve kuglice iz vreće boje u bilo koje boje osim crvene.

**Rješenja dodatnih zadataka**

1. Elementarnih događaja je od kojih je povoljnih 4 (1-2,1-3,2-2,3-1). Vjerojatnost događaja je stoga .

2. a) p(A)=  b) p(B)= c) p(C)= d) p(D)=1-p(C)=

3. a) b)

p (Tri je puta palo pismo)= p (Tri je puta palo isto)=

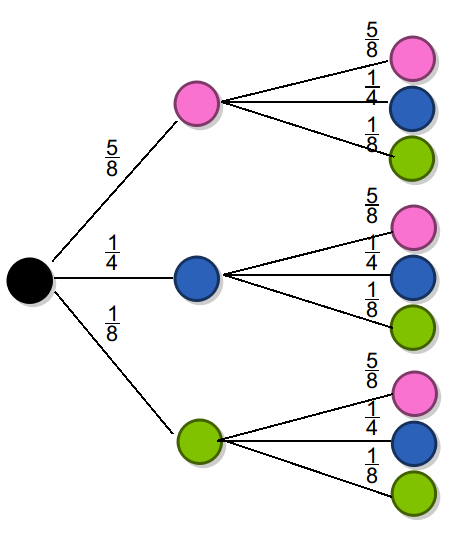
1. d.)

p (Posljednje je palo pismo)=  p (Pala su tri pisma ili barem dvije glave)= 

4. p (Ni jedna izvučena kuglica nije bijela).

p (Barem je jedna izvučena kuglica bijela)

1. p (Ni u subotu, ni u nedjelju neće padati kiša)

p (U subotu ili u nedjelju padat će kiša)6.

6.

1. p(A)= 
2. p(B)= 
3. p(C)= 

**Rješenja dopunskih zadataka**

1. a) 10 b) 5, 3, 2 c) p(A)=, p(B)= , p(C)= 

2. a) A – „Izvučena je kartica sa slovom A“

B – „Izvučena je kartica sa slovom N“

1. p(A)= , p(B)= 

3.

